نام و نام خانوادگی:

زمان آزمون: ۱۲۵ دقیقه

نام دبیر: خانم بیات، خانم هلالی پور

(زمان پیشنهادی مثلثات ۲۵ دقیقه از ۱۲۵ دقیقه)

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

مرکز آموزشی فرزانگان ۳-تهران

تاریخ آزمون: ۹۱/۱۰/۹

نام درس: ریاضی

کلاس: دوم ریاضی و تجربی

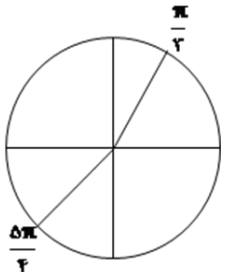
۱

$$\theta_{rad}=\frac{L}{R}=\frac{3/14}{1/2}=\frac{314}{120}=\frac{100\pi}{120}=\frac{5\pi}{6}\,rad \qquad \frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}=\frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi}\Rightarrow D=150^\circ$$

$$x=\frac{1}{2}\quad,\quad y=-\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad r=\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{3}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{r}{x}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$$

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
$\cos\theta$	$\frac{1}{2}$	$\cup$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\Rightarrow -1\le\cos\theta<\frac{1}{2}\Rightarrow -1\le 2m-1<\frac{1}{2}\Rightarrow 0\le 2m<\frac{3}{4}$$

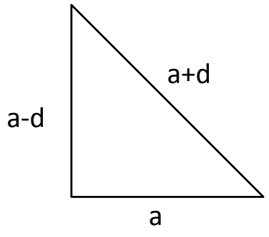
۲

$$\cos 15^\circ=\sqrt{1-\sin^2 15^\circ}=\sqrt{1-\frac{6+2-2\sqrt{12}}{16}}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{4}\Rightarrow\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$A=\frac{\cos(720^\circ+15^\circ)-\sin(180^\circ+15^\circ)}{-\tan(90^\circ+15^\circ)\tan(15^\circ)}=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{-\cot 15^\circ\tan 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{-1}$$

$$=\sin 15^\circ-\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۳

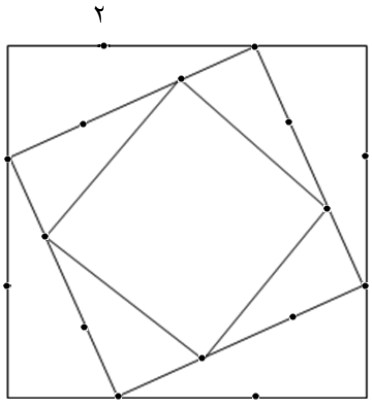


$$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2\Rightarrow$$

$$a^2-2ad+d^2=a^2+a^2-2ad+d^2\Rightarrow 0=a^2-4ad\Rightarrow 0=a(a-4d)\xrightarrow{a\neq 0}a=4d$$

$$s=\frac{a(a-d)}{2}\Rightarrow 48=\frac{4d\times 3d}{2}\Rightarrow 48=6d^2\Rightarrow d^2=8\Rightarrow d=2\sqrt{2}\Rightarrow \text{وتر}=10\sqrt{2}$$

۴



دنباله اضلاع : $3, \sqrt{5}, \frac{5}{3}, \ldots$

دنباله مساحت‌ها : $9, 5, \ldots$ $\quad q = \frac{5}{9}$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{(3)^2}{1-\frac{5}{9}} = \frac{9}{\frac{4}{9}} = \frac{81}{4}$$

۵

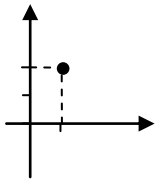
$$A = (\sqrt{6}-\sqrt{5})^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(\sqrt{6}-\sqrt{5})^{-\sqrt{3}+\sqrt{2}} = (\sqrt{6}-\sqrt{5})^{2\sqrt{2}}$$

$$B = A^{\sqrt{2}} = ((\sqrt{6}-\sqrt{5})^{2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{6}-\sqrt{5})^4 =$$

$$36-24\sqrt{30}+180-20\sqrt{30}+25 = 241-44\sqrt{30}$$

۶

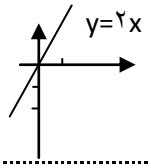
الف) $\underset{+}{|y-3|} + \underset{+}{4\sqrt{2x-1}} = 0 \longleftarrow$ هر دو مقدار باید صفر باشد $\Leftarrow$ نمایش نقطه $\left|\begin{matrix}1/2\\3\end{matrix}\right.$ $\Leftarrow$ تابع



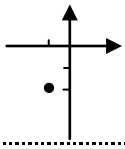
ب) $(y-2x)\left(x^2+y^2-2x+4y+5\right)=0$

$y-2x=0$ یا $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

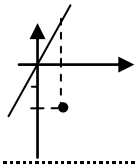
$y=2x$ $\quad (x-1)^2+(y+2)^2$



$\cup$



$\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right. \Rightarrow$



تابع نیست

۷

$y^2-3y=10 \Rightarrow y^2-3y-10=0 \Rightarrow (y-5)(y+2)=0$ $\begin{matrix} y=-2 \\ y=5 \end{matrix}$ هر دو جواب قابل قبول

$$\frac{1}{x-2}=3 \Rightarrow x-2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{3}+2=\frac{5}{3}$$

۸

$f(x_1)=f(x_2)$

$$\frac{3x_1-1}{x_1-2}=\frac{3x_2-1}{x_2-2}$$

$3x_1x_2-6x_1-x_2+2=3x_1x_2-x_1-6x_2+2$

$6x_2-x_2=6x_1-x_1$

$5x_1=5x_2 \Rightarrow x_1=x_2 \quad \rightarrow 1-1$

$$y=\frac{3x-1}{x-2}$$

$yx-2y=3x-1$

$yx-3x=2y-1 \Rightarrow (y-3)x=2y-1$

$$x=\frac{2y-1}{y-3} \Rightarrow y=f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-3}$$

۹

$$f(x)=\begin{cases}\left|x^2-2x+1-1\right| & x\geq 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|(x-1)^2-1\right| & x\geq 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}\qquad D=\square\qquad R=[0,+\infty)$$

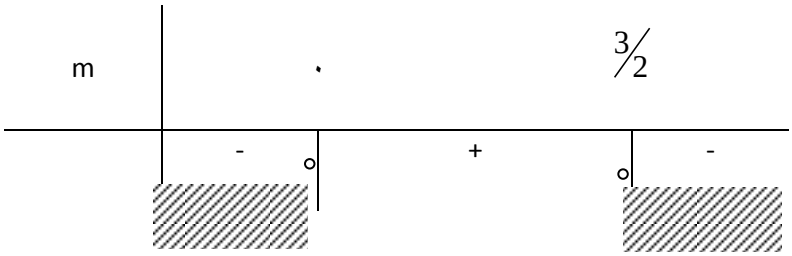
۱۰

$$f(x)=ax+b$$
$$f(2x+1)=a(2x+1)+b=2ax+a+b\quad\Rightarrow$$
$$f(4x-1)=a(4x-1)+b=4ax-a+b$$
$$yax+3a+3b+4ax-a+b=5x-2$$
$$10ax+2a+4b=5x-2$$
$$a=\frac{1}{2}\qquad 2a+4b=-2\quad\Rightarrow\quad 4+4b=-2\quad\Rightarrow\quad b=\frac{-3}{4}\quad\Rightarrow\quad f(3)=\frac{3}{4}$$

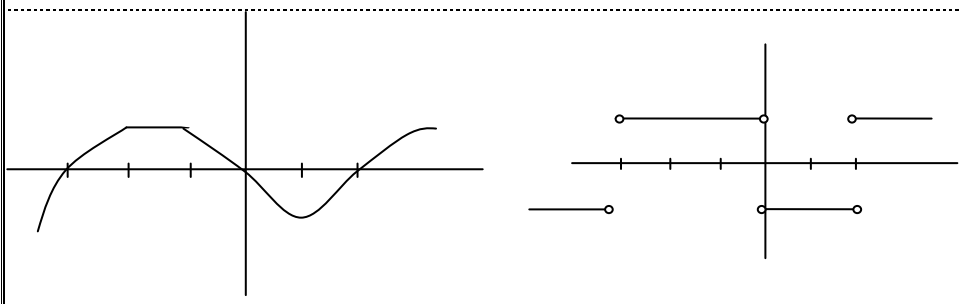
۱۱

$$g(x)=\frac{2x}{\underbrace{\sqrt{(m-1)x^2-2x+2m-1}}_{\text{همواره مثبت}}}\Rightarrow\begin{cases}\Delta'<0 & \Rightarrow 1-(m-1)(2m-1)<0\Rightarrow 3m-2m^2<0\\ a>0 & \Rightarrow m>1\end{cases}\qquad m(3-2m)<0$$

$$A_1=(-\infty,0)\cup(3/2,+\infty)\xrightarrow{\cap}A=(3/2,+\infty)$$
$$A_2=(1,+\infty)$$



۱۲



الف:

$$\frac{f(x)}{f(x)}=\begin{cases}1 & f(x)>0\\ -1 & f(x)<0\end{cases}$$

ب:

$$f(x)\times(x-1)\geq 0$$

x	-۳	۰	۱	۲	
f(x)	-	+	-	-	+
x-۱	-	-	-	+	+
	+	-	+	-	+

ج:

$$D=\mathbb{R}-\{-4,-1,1\}$$

۱۳

$$x=2a \quad\Rightarrow\quad 4=2a \quad\Rightarrow\quad a=2$$

همواره مثبت است پس جداول روبرو هیچگاه نمیتواند جدول b^2

باشد $(b^2x-a)(x-2a)^2$

ریشه مضاعف

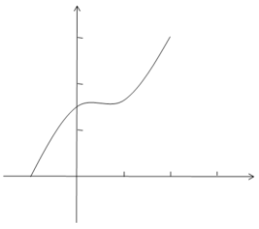
x		۲ (۴)	
y	+	-	-

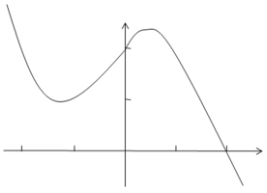
موافق علامت a (یعنی b^2)

۱۴

الف) این سوال بیش از یک پاسخ دارد

ب) این سوال بیش از یک پاسخ دارد





ج)

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1+1-5=(x-1)^3-4$$

$$f(\sqrt[3]{y}+1)=y-4=2$$

د) واگرا

$$a_n=\frac{n^2+3n}{n}=n+3$$

همگرا به ۳

$$b_n=\frac{3n^2}{n^2-1}=\frac{3n^2-3+3}{n^2-1}=3+\frac{3}{n^2-1}$$